ลำดับประเภทที่หนึ่ง

กำจร มุณีแก้ว[1,*]

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพฯ
[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้อ้างอิงมาจากงานวิจัยเรื่อง Sequences of series ของ Abdul-Majid Wazwaz ซึ่งนำเสนอลำดับประเภทใหม่ที่มีพจน์ทั้งหลายอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ซึ่งเกี่ยวข้องกับแฟกทอเรียล ด้วยเหตุนี้ผู้เขียนจึงขอเริ่มแนะนำให้รู้จักลำดับประเภทที่หนึ่งก่อน ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 แบบ ดังนี้คือ $A = \{a_n\}$ โดยที่พจน์ของ a_n เป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ $B = \{b_n\}$ โดยที่พจน์ของ b_n เป็นอนุกรมสลับของจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดย

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+k)!} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

และ $$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{k}{(n+k)!} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

สำหรับในบทความนี้ผู้เขียนได้ศึกษาและทำการพิสูจน์พจน์ a_n และ b_n ในแบบใหม่ที่สามารถอนุมานให้อยู่ในรูปวางนัยทั่วไป ซึ่งได้ผลเป็นดังนี้

$$a_n = -(n-1)\left[e - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!}\right] + \frac{1}{(n-1)!}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

และ $$b_n = -(1+n)\left[e^{-1} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!}\right] - (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้นผลที่ได้จึงเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจที่ต้องการนำไปใช้เป็นแนวคิดพื้นฐานของแคลคูลัสต่อไป

คำสำคัญ : ลำดับประเภทที่หนึ่ง/ อนุกรม

First Type of Sequences

Kumjorn Muneekaew[1,*]

[1]Mathematics Program, Faculty of Science and Technology, Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok

[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

Abstract

This article has been referred to the “Sequences of series” by Abdul-Majid Wazwaz who present the new types of sequences whose terms are infinite series involving factorials. First of all, author would like to introduce first type of sequences which has been separated into two models; $A = \{ a_n\}$, whose terms a_n are series of real numbers and $B = \{b_n\}$, whose terms b_n are an alternating series of real numbers; are given by:

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+k)!} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

and $$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{k}{(n+k)!} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

In this article, author has researched and proved the new terms a_n and b_n, can deduce the generalization form which the results below:

$$a_n = -(n-1)\left[e - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!}\right] + \frac{1}{(n-1)!}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

and $$b_n = -(1+n)\left[e^{-1} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!}\right] - (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Therefore, the results are beneficial to those who are interested to apply fundamental concepts of calculus.

Keywords: first type of sequences/ series

บทนำ

จากจำนวนอตรรกยะ e ที่นิยามโดย $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818\ldots$

ถ้านำ e ยกกำลังจำนวนจริงบวก k สามารถทำได้ดังนี้

$$e^k = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{nk}\right)^{nk} = \lim_{nk\to\infty}\left(1+\frac{k}{nk}\right)^{nk}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^m$$

เมื่อ m = nk นั่นคือ $e^k = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^m$

และนอกจากนี้ e^k ยังคงเป็นจริง สำหรับจำนวนจริงลบ k ได้เช่นเดียวกัน

กำหนด $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad ; \quad x \in R$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{0}\left(\frac{x}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k + \cdots\right] ; k < n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]}{n^k}x^k + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots$$

ให้ $f(x) = e^x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}x^r$

$$f(1) = e = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}$$

นั่นคือ $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถหาค่า e^{-1} ได้ โดยจัดอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ได้เป็นดังนี้

$$\text{จาก } e^x = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{1}{r!} x^r$$

$$e^{-x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (-x)^r$$

$$\text{ให้ } g(x) = e^{-x} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} x^r$$

$$g(1) = e^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

$$\text{นั่นคือ } e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$$

ต่อไปจะอ้างถึงจำนวนอตรรกยะ e และ e^{-1} เพื่อนำไปใช้ในการสร้างลำดับประเภทที่หนึ่งของอนุกรมอนันต์ ซึ่งมี 2 รูปแบบ ดังนี้

1. ลำดับ $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_n}\}$ เมื่อ a_n เป็นอนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง

$$\text{นิยามโดย } a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+k)!} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{จาก} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{2}{(n+2)!} + \frac{3}{(n+3)!} + \cdots$$

$$= \left[\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}\right] + \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+2)!}\right] + \left[\frac{1}{(n+2)!} - \frac{n}{(n+3)!}\right] + \cdots$$

$$= \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right] - n\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right] - n\left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right] + \frac{n}{n!}$$

$$= (1-n)\left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right] + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(n+k)!} = -(n-1)\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\right]+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= -(n-1)\left[e-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r!}\right]+\frac{1}{(n-1)!}$$

ดังนั้นจึงได้ a_n ในรูปแบบวางนัยทั่วไป เป็นดังนี้

$$a_n = -(n-1)\left[e-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r!}\right]+\frac{1}{(n-1)!};\quad n=1,2,3,\ldots \qquad \ldots.(1.1)$$

เมื่อพิจารณาลิมิตที่อนันต์ของ a_n ใน (1.1) จึงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

และวิเคราะห์หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ a_n ได้เป็นดังนี้

จาก $a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(n+k)!}$; $n=1,2,3,\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{2}{(n+2)!}+\frac{3}{(n+3)!}+\frac{4}{(n+4)!}+\cdots\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}+\frac{2}{5!}+\frac{2}{6!}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{3}{4!}+\frac{3}{5!}+\frac{3}{6!}+\frac{3}{7!}+\cdots\right)+\left(\frac{4}{5!}+\frac{4}{6!}+\frac{4}{7!}+\frac{4}{8!}+\cdots\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\cdots$$

$$= \frac{1}{(1+1)!}+\frac{1+2}{(2+1)!}+\frac{1+2+3}{(3+1)!}+\frac{1+2+3+4}{(4+1)!}$$

$$+\cdots+\frac{1+2+3+4+\ \ldots\ +m}{(m+1)!}+\cdots$$

กำหนดให้ $a_m = \dfrac{1+2+3+4+\ ...\ +m}{(m+1)!}$

$$= \frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{m}{2}(m+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2[(m-1)!]}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} \qquad ; \quad r = n-1$$

$$= \frac{1}{2}e$$

นั่นคือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}e$ หรือประมาณ 1.359141

2. ลำดับ $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_n}\}$ เมื่อ b_n เป็นอนุกรมอนันต์สลับของจำนวนจริง

นิยามโดย $\displaystyle b_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{k}{(n+k)!} \qquad ; \ n = 1, 2, 3, ...$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{k}{(n+k)!} = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}\frac{2}{(n+2)!} + (-1)^{n+3}\frac{3}{(n+3)!} + \cdots$$

$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}\right] + (-1)^{n+2}\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+2)!}\right]$$

$$+ (-1)^{n+3}\left[\frac{1}{(n+2)!} - \frac{n}{(n+3)!}\right] + \cdots$$

$$= \left[(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+3}\frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right]$$

$$-n\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!} + (-1)^{n+3}\frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{k}{(n+k)!} = -\left[(-1)^{n}\frac{1}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right]$$

$$-n\left[(-1)^{n}\frac{1}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right]+(-1)^{n}\frac{n}{n!}$$

$$= -(1+n)\left[(-1)^{n}\frac{1}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right]+(-1)^{n}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= -(1+n)\left[\,e^{-1}-\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\right]-(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= -(1+n)\left[e^{-1}-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\frac{1}{r!}\right]-(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

ดังนั้นจึงได้ b_n ในรูปแบบวางนัยทั่วไป เป็นดังนี้

$$b_n = -(1+n)\left[e^{-1}-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\frac{1}{r!}\right]-(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!};\ n = 1,2,3,\ldots \quad (2.1)$$

เมื่อพิจารณาลิมิตที่อนันต์ของ b_n ใน (2.1) จึงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

และวิเคราะห์หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ b_n ได้เป็นดังนี้

จาก $\quad b_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{k}{(n+k)!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^{n+2}\frac{2}{(n+2)!}+(-1)^{n+3}\frac{3}{(n+3)!}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+4}\frac{4}{(n+4)!}+\cdots\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\right)+\left(-\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}-\frac{2}{5!}+\frac{2}{6!}-\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{3}{4!}-\frac{3}{5!}+\frac{3}{6!}-\frac{3}{7!}+\cdots\right)+\left(-\frac{4}{5!}+\frac{4}{6!}-\frac{4}{7!}+\frac{4}{8!}-\cdots\right)+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2!} - \frac{1+2}{3!} + \frac{1+2+3}{4!} - \frac{1+2+3+4}{5!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(1+1)!} - \frac{1+2}{(2+1)!} + \frac{1+2+3}{(3+1)!} - \frac{1+2+3+4}{(4+1)!} + \cdots$$

$$= (-1)^{1+1}\frac{1}{(1+1)!} + (-1)^{2+1}\frac{(1+2)}{(2+1)!} + (-1)^{3+1}\frac{(1+2+3)}{(3+1)!}$$

$$+(-1)^{4+1}\frac{(1+2+3+4)}{(4+1)!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{(1+2+3+4+\ \ldots + m)}{(m+1)!} + \cdots$$

กำหนดให้ $b_m = (-1)^{m+1}\frac{(1+2+3+4+\ \ldots + m)}{(m+1)!}$

$$= (-1)^{m+1}\frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{m}{2}(m+1)\right]$$

$$= (-1)^{m+1}\frac{1}{2[(m-1)!]}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2[(n-1)!]}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+2}\frac{1}{r!}; \quad r = n-1$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{1}{r!}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-1}$$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}e^{-1}$ หรือประมาณ 0.1839397

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของลำดับประเภทที่หนึ่ง ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของลำดับ a_n และ b_n

n	a_n	b_n
1	1	0.2642411
2	0.281718	-0.1036383
3	6.343635E-02	2.848224E-02
4	1.182118E-02	-6.063873E-03
5	1.872686E-03	1.056687E-03
.	...	...
.	...	...
.	...	...
16	3.150251E-15	-2.522184E-15
17	1.739494E-16	1.409098E-16
18	9.105181E-18	-7.453918E-18
19	4.530099E-19	3.744079E-19
20	2.147513E-20	-1.790349E-20
21	9.721486E-22	8.169049E-22
22	4.210898E-23	-3.564216E-23
23	1.748500E-24	1.489885E-24
24	6.971791E-26	-5.977324E-26
25	2.673582E-27	2.305328E-27
26	9.875169E-29	-8.560192E-29
27	3.517905E-30	3.064531E-30
28	1.210229E-30	-1.059098E-31
29	4.027748E-33	3.537626E-33
30	1.322565E-34	-1.142573E-34
$n \to \infty$	0	0
	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.359141$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0.1839397$

สรุป

จากการศึกษาและวิเคราะห์เชิงตัวเลขลำดับประเภทที่หนึ่งของอนุกรมอนันต์ ได้เป็นดังนี้

1. ลำดับ $A = \{a_n\}$ ได้ผลสรุป ดังนี้

1.1 a_n มีอยู่ 2 แบบ คือ $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+k)!}$; $n = 1, 2, 3, \dots$

และ $$a_n = -(n-1)\left[e - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!}\right] + \frac{1}{(n-1)!};\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.2 ลิมิตและผลบวกของอนุกรมอนันต์ a_n ได้ผล ดังนี้ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.359141$

2. ลำดับ $B = \{b_n\}$ ได้ผลสรุป ดังนี้

2.1 b_n มีอยู่ 2 แบบ คือ $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{k}{(n+k)!};$ $n = 1, 2, 3, \dots$

และ $$b_n = -(1+n)\left[e^{-1} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{r!}\right] - (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!};\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.2 ลิมิตและผลบวกของอนุกรมอนันต์ b_n ได้ผล ดังนี้ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0.1839397$

เอกสารอ้างอิง

Abdul, M.W. (1992). Sequences of series. **Appl. math. Letters**, 5(3), 39-43.

Hardy, G.H. (1963). **Divergent Series.** London: Oxford university press.