ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต

กำจร มุณีแก้ว[1,*]

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพฯ

[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอกระบวนการหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต คือ

$$x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + \ldots + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0\,;\; n = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น ซึ่งต้องอาศัยวิธีของสมการลักษณะเฉพาะฟังก์ชันก่อกำเนิดและหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายแสดงให้เห็นทุกขั้นตอนโดยละเอียด โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อหาจำนวน x_n ซึ่งเป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต ก็ต่อเมื่อจำนวน x_n เหล่านั้น เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป ซึ่งกำหนดโดยสูตรแบบบิเนท ดังนี้

$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big[(b-a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b-a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\Big]\,; n = 1,2,3,\ldots$$

เมื่อ $b = a^2 + a + r,\;\; \lambda_{1,2} = \dfrac{a+2\pm\sqrt{a^2+4r}}{2}$

นั่นหมายความว่าคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิตจึงเป็นลำดับชุดหนึ่งของความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปแต่ไม่เป็นจำนวนฟีโบนักชีตามปกติ

คำสำคัญ : ความสัมพันธ์เวียนเกิด/ จำนวนฟีโบนักชี/ สูตรแบบบิเนท

Linear Recurrence Relations with Coefficients in Arithmetic Progression

Kumjorn Muneekaew[1,*]

[1]Mathematics Program, Faculty of Science and Technology, Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
[*]Corresponding author e-mail: munee.j@hotmail.com

Abstract

This article presents the process of finding the solution of the linear recurrence relations with coefficients in arithmetic progression,

$$x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + \ldots + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \text{ ; } n = 0,1,2,\ldots$$

where x_0 is initial data. Which requires the method of characteristic equation, of generating function and of mathematical induction, describe all the steps in detail, the aim is to find the numbers x_n, the solution of the linear recurrence relations with coefficients in arithmetic progression if and only if those numbers x_n are the generalized Fibonacci numbers given by the Binet type formula as follows:

$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b-a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b-a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\right] \text{ ; } n = 1,2,3,\ldots$$

where $b = a^2 + a + r$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{a^2+4r}}{2}$

This means that the solution of the linear recurrence relations with coefficients in arithmetic progression is a sequence of certain generalized Fibonacci numbers but not of usual Fibonacci numbers.

Keywords: binet type formula/ fibonacci numbers/ recurrence relations

บทนำ

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิตจัดเป็นความสัมพันธ์หนึ่งในรูปของอนุกรมที่มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกับจำนวนฟีโบนักชี ซึ่งคำนวณหาคำตอบได้จากความสัมพันธ์ฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปและสูตรแบบบิเนท แต่ด้วยกระบวนการหาคำตอบยังขาดเหตุผลการพิสูจน์ที่สมบูรณ์ ผู้เขียนจึงสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าที่มาของกระบวนการหาคำตอบเพิ่มเติม เพื่ออธิบายถึงความเชื่อมโยงกันของคำตอบทั้งสองแบบดังกล่าว ที่สามารถนำมาอธิบายผลการคำนวณให้ถูกต้องแม่นยำอันจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์การคณนา วิทยาการคอมพิวเตอร์หรือวิศวกรรม เป็นต้น ต่อไปจะขอเริ่มต้นแนะนำให้รู้จักความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเพื่อเรียนรู้เป็นพื้นฐานเบื้องต้นกันก่อนดังต่อไปนี้

กำหนด $x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + \ldots + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \qquad \ldots(1.1)$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
n=0\ ;\quad x_1 &= ax_0 \\
n=1\ ;\quad x_2 &= ax_1 + (a+r)x_0 \\
&= a(ax_0) + (a+r)x_0 \\
&= (a^2+a+r)x_0 \\
x_2 &= bx_0 \quad \text{โดยที่} \quad b = a^2+a+r
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะกำหนดความสัมพันธ์ (1.1) อีกแบบหนึ่ง โดยลดรูปให้เหลืออยู่ในพจน์ของ x_n และ x_{n-1} ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + (a+r)x_{n-1} + (a+2r)x_{n-2} + \ldots + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \\
&= ax_n + ax_{n-1} + rx_{n-1} + ax_{n-2} + 2rx_{n-2} + \ldots + ax_1 + nrx_1 - rx_1 + ax_0 + nrx_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= ax_{n-1} + (a+r)x_{n-2} + (a+2r)x_{n-3} + \ldots + \big(a+(n-2)r\big)x_1 + \big(a+(n-1)r\big)x_0 \\
&= ax_{n-1} + ax_{n-2} + rx_{n-2} + ax_{n-3} + 2rx_{n-3} + \ldots + ax_1 + nrx_1 - 2rx_1 + ax_0 + nrx_0 - rx_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{n-1} &= ax_{n-2} + (a+r)x_{n-3} + \ldots + \big(a+(n-3)r\big)x_1 + \big(a+(n-2)r\big)x_0 \\
&= ax_{n-2} + ax_{n-3} + rx_{n-3} + \ldots + ax_1 + nrx_1 - 3rx_1 + ax_0 + nrx_0 - 2rx_0
\end{aligned}
$$

$$x_{n+1} - x_n = ax_n + rx_{n-1} + rx_{n-2} + \ldots + rx_1 + rx_0$$

$$x_n - x_{n-1} = ax_{n-1} + rx_{n-2} + ... + rx_1 + rx_0$$

$$(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1}) = ax_n + (r-a)x_{n-1}$$

$$x_{n+1} - x_n - x_n + x_{n-1} = ax_n - cx_{n-1} \ ; \ c = a - r$$

ดังนั้น $x_{n+1} = (a+2)x_n - (c+1)x_{n-1} \ ; \ n = 2, 3, 4, ...$ ...(1.2)

ดังจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิด (1.2) นี้ มีรูปแบบเป็นสมการฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป โดยมีข้อสังเกตว่าความสัมพันธ์เวียนเกิด (1.2) นี้ จะใช้หาค่าไม่ได้สำหรับ $n = 1$ ทั้งนี้ จาก $x_{n+1} = (a+2)x_n - (c+1)x_{n-1}$

ให้ $n = 1$; $x_2 = (a+2)x_1 - (c+1)x_0$

$$= (a+2)ax_0 - (a-r+1)x_0$$

$$= (a^2 + a + r - 1)x_0$$

นั่นคือ $x_2 \neq bx_0$

ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นจึงเป็น x_1 และ x_2 ซึ่งก็แทนที่ x_0 และ x_1 ตามลำดับ

เนื้อหา

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิตคือ

$$x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + ... + \big(a + (n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \quad ; \ n = 0, 1, 2, ...$$

โดยความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นนี้มีความเชื่อมโยงกันกับความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$x_{n+1} = (a+2)x_n - (c+1)x_{n-1} \ ; \ n = 2, 3, 4, ...$$

เมื่อหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นดังกล่าว โดยอาศัยสมการลักษณะเฉพาะของฟีโบนักชีจึงได้คำตอบ x_n เป็นไปตามสูตรแบบบิเนท ดังนี้

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

โดยที่ $\lambda_{1,2}$ เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda^2 - (a+2)\lambda + c + 1 = 0$ ซึ่งจะได้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$x_1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = ax_0 \quad \text{และ} \quad x_2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = bx_0$$

และค่าสัมประสิทธิ์ $c_{1,2}$ หาได้จาก $c_{1,2} = \pm \dfrac{x_0(b-a\lambda_{2,1})}{\lambda_{1,2}(\lambda_1-\lambda_2)}$

ต่อไปจะนำความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นนี้มาพิสูจน์เพื่อหาคำตอบอีกครั้ง ดังจะกล่าวถึงในทฤษฎีบท 2.1

ทฤษฎีบท 2.1 จำนวน x_n เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต

$$x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + \ldots + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \;\; ; \; n = 0,1,2,\ldots \ldots (2.1)$$

โดยที่ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น ก็ต่อเมื่อคำตอบทั้งหลายเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่ถูกวางนัยทั่วไปซึ่งกำหนดโดยสูตรแบบบิเนท ดังนี้

$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1-\lambda_2}\Big[(b-a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b-a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\Big] \;\; ; \; n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots(2.2)$$

เมื่อ $b = a^2 + a + r, \;\; \lambda_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{a^2+4r}}{2}$

พิสูจน์ จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้นตอนโดยละเอียดดังนี้

1. พิสูจน์โดยใช้วิธีฟังก์ชันก่อกำเนิด

จะแสดงด้วยอนุกรมรูปนัยได้โดยฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ x_n ดังนี้

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \\ &= x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots \\ &= x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} t^{n+1} \\ &= x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (a+kr)x_{n-k} t^{n+1} \end{aligned}$$

$$X(t) - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (a+kr)x_{n-k} t^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{0}(a+kr)x_{0-k}t + \sum_{k=0}^{1}(a+kr)x_{1-k}t^2 + \sum_{k=0}^{2}(a+kr)x_{2-k}t^3 + \sum_{k=0}^{3}(a+kr)x_{3-k}t^4 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&= ax_0t + \left(ax_1t^2 + (a+r)x_0t^2\right) + \left(ax_2t^3 + (a+r)x_1t^3 + (a+2r)x_0t^3\right) \\
&\quad + \left(ax_3t^4 + (a+r)x_2t^4 + (a+2r)x_1t^4 + (a+3r)x_0t^4\right) + \ldots \\
&= at(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots) + (a+r)t^2(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots) \\
&\quad + (a+2r)t^3(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots) + \ldots \\
&= \left(at + (a+r)t^2 + (a+2r)t^3 + \ldots\right)(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots) \\
&= t\left(a + (a+r)t + (a+2r)t^2 + \ldots\right)(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots) \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty}(a+nr)t^n \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty}(a+nr)t^n X(t) \\
&= t\left(a\sum_{n=0}^{\infty} t^n + r\sum_{n=0}^{\infty} nt^n\right)X(t) \\
&= t\left[a\sum_{n=0}^{\infty} t^n + rt\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}t^n\right]X(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(t) - x_0 &= t\left[a\left(\frac{1}{1-t}\right) + rt\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right]X(t) \\
&= t\left[\frac{a}{1-t} + rt\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]X(t) \\
&= t\left[\frac{a}{1-t} + \frac{rt}{(1-t)^2}\right]X(t) \\
&= t\left[\frac{a(1-t) + rt}{(1-t)^2}\right]X(t) \\
&= t\left[\frac{a - (a-r)t}{(1-t)^2}\right]X(t) \\
&= \frac{t(a-ct)}{(1-t)^2}X(t)
\end{aligned}
$$

$$\left[\frac{(1-t)^2 - t(a-ct)}{(1-t)^2}\right] X(t) = x_0$$

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{x_0(1-t)^2}{(1-t)^2 - t(a-ct)} \\ &= \frac{x_0(t-1)^2}{1-2t+t^2-ta+ct^2} \\ &= \frac{x_0(t-1)^2}{(c+1)t^2-(a+2)t+1} \\ &= \frac{x_0(t^2-2t+1)}{(c+1)\left(t^2-\left(\frac{a+2}{c+1}\right)t+\frac{1}{c+1}\right)} \end{aligned}$$

$$X(t) = \frac{x_0}{c+1}\left[1+\frac{(r-c)t+c}{(c+1)\left(t^2-\left(\frac{a+2}{c+1}\right)t+\frac{1}{c+1}\right)}\right] \qquad ...(2.3)$$

จาก (2.3) จะจัดรูปใหม่โดยนิยามเขียนในรูปการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ดังนี้

ถ้าให้ $t^2-\left(\frac{a+2}{c+1}\right)t+\frac{1}{c+1} = (t-t_1)(t-t_2)$

โดยที่ $t_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ และ $t_2 = \frac{1}{\lambda_2}$

เป็นรากคำตอบของสมการ $t^2-\left(\frac{a+2}{c+1}\right)t+\frac{1}{c+1} = 0$

ดังนั้น $X(t) = \frac{x_0}{c+1} + \frac{x_0\left((r-c)t+c\right)}{(c+1)^2(t-t_1)(t-t_2)}$ ...(2.4)

จาก (2.4) จะจัดรูปใหม่โดยนิยามเขียนในรูปเศษส่วนย่อย ดังนี้

พิจารณา $\frac{(r-c)t+c}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}$

เพราะฉะนั้น $(r-c)t+c = A(t-t_2)+B(t-t_1)$

ให้ $t = t_1\,;\; A = \dfrac{(r-c)t_1 + c}{t_1 - t_2}$

$t = t_2\,;\; B = \dfrac{(r-c)t_2 + c}{t_2 - t_1}$

นำค่าคงที่ A และ B แทนใน (2.4) จึงได้เป็น ดังนี้

$$X(t) = \frac{x_0}{c+1} + \frac{x_0}{(c+1)^2}\left[\frac{(r-c)t_1 + c}{(t_1 - t_2)(t - t_1)} + \frac{(r-c)t_2 + c}{(t_2 - t_1)(t - t_2)}\right]$$

$$= \frac{x_0}{c+1} + \frac{x_0}{(c+1)^2(t_1 - t_2)}\left[\frac{(r-c)t_1 + c}{t - t_1} - \frac{(r-c)t_2 + c}{t - t_2}\right] \qquad ...(2.5)$$

จาก (2.5) โดยอาศัยสมการลักษณะเฉพาะเปลี่ยนรูปใหม่อีกครั้ง ดังนี้

เนื่องจาก $\lambda^2 - (a+2)\lambda + c + 1 = 0$ จะได้ $c + 1 = \lambda(a + 2 - \lambda)$

หรือ $c + 1 = \lambda_1\lambda_2$ เมื่อ $\lambda_1 = \lambda$ และ $\lambda_2 = a + 2 - \lambda_1$ แล้วนำไปแทนใน (2.5)

จะได้ $$X(t) = \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{c\lambda_1 + r - c}{1 - \lambda_1 t} - \frac{c\lambda_2 + r - c}{1 - \lambda_2 t}\right]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[(c\lambda_1 + r - c)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^n t^n - (c\lambda_2 + r - c)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^n t^n\right]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\Big[(c\lambda_1 + r - c) - (c\lambda_2 + r - c)$$

$$+ (c\lambda_1 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n t^n - (c\lambda_2 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_2^n t^n\Big]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}(c\lambda_1 - c\lambda_2)$$

$$+ \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[(c\lambda_1 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n t^n - (c\lambda_2 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_2^n t^n\right]$$

$$= \frac{x_0(c+1)}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[(c\lambda_1 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n t^n - (c\lambda_2 + r - c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_2^n t^n\right]$$

$$X(t) = x_0 + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\left[(c\lambda_1+r-c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n t^n - (c\lambda_2+r-c)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_2^n t^n\right]$$

$$= x_0 + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\Big[(c\lambda_1+r-c)(\lambda_1 t+\lambda_1^2t^2+\lambda_1^3t^3+\ldots)$$

$$-(c\lambda_2+r-c)(\lambda_2 t+\lambda_2^2t^2+\lambda_2^3t^3+\ldots)\Big]$$

$$= x_0 + \frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\left[(c\lambda_1+r-c)\lambda_1-(c\lambda_2+r-c)\lambda_2\right]t$$

$$+\frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\left[(c\lambda_1+r-c){\lambda_1}^2-(c\lambda_2+r-c){\lambda_2}^2\right]t^2$$

$$+\frac{x_0}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\left[(c\lambda_1+r-c){\lambda_1}^3-(c\lambda_2+r-c){\lambda_2}^3\right]t^3+\ldots$$

$$= x_0 + x_0\left[\frac{c\lambda_1+r-c}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{c\lambda_2+r-c}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\right]t + x_0\left[\frac{(c\lambda_1+r-c)\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{(c\lambda_2+r-c)\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\right]t^2$$

$$+x_0\left[\frac{(c\lambda_1+r-c)\lambda_1^2}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{(c\lambda_2+r-c)\lambda_2^2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\right]t^3+\ldots$$

$$X(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x_0(c\lambda_1+r-c)}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\lambda_1^{n-1}-\frac{x_0(c\lambda_2+r-c)}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\lambda_2^{n-1}\right]t^n \qquad \ldots(2.6)$$

จาก (2.6) เราจะแสดงความสัมพันธ์ของรากคำตอบ λ_1 และ λ_2 จากสมการลักษณะเฉพาะ ดังนี้

พิจารณา $\lambda_j^2-(a+2)\lambda_j+c+1=0$; $j=1,2$

$$\therefore \quad \lambda_2^2 = (a+2)\lambda_2-(c+1)$$

$$a\lambda_2^2 = (a^2+2a)\lambda_2 - a(c+1)$$

$a\lambda_2^2 = (b+c)\lambda_2 - a(c+1)$; $b = a^2+a+r$ และ $c=a-r$

$$ac+a-c\lambda_2 = b\lambda_2 - a\lambda_2^2$$

$$ac+c+r-c\lambda_2 = b\lambda_2 - a\lambda_2^2$$

$$ac + 2c - c\lambda_2 + r - c = b\lambda_2 - a\lambda_2^2$$
$$c(a + 2 - \lambda_2) + r - c = b\lambda_2 - a\lambda_2^2$$
$$c\lambda_1 + r - c = b\lambda_2 - a\lambda_2^2 \;;\; \lambda_1 = a + 2 - \lambda_2$$
$$\frac{c\lambda_1 + r - c}{\lambda_2} = b - a\lambda_2 \qquad ...(2.7)$$

ในทำนองเดียวกัน $\lambda_1^2 = (a+2)\lambda_1 - (c+1)$

จะได้ $$\frac{c\lambda_2 + r - c}{\lambda_1} = b - a\lambda_1 \qquad ...(2.8)$$

นำค่าที่ได้จาก (2.7) และ (2.8) นำไปแทนใน (2.6) จึงได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิด $X(t)$ ถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์

$$x_n = \frac{x_0(c\lambda_1 + r - c)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\lambda_1^{n-1} - \frac{x_0(c\lambda_2 + r - c)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}\lambda_2^{n-1}$$
$$= \frac{x_0(b - a\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^{n-1} - \frac{x_0(b - a\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^{n-1}$$
$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b - a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\right] \;;\; n = 1, 2, 3, ...$$

จึงสรุปได้ว่าลำดับ x_n ข้างต้นนี้ได้ผลออกมาเป็นสูตร (2.2) ในทางกลับกันถ้าลำดับ x_n ถูกกำหนดโดยสูตร (2.2) แล้วลำดับ x_n จึงต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปและมีความสัมพันธ์กันกับสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda_j^2 = (a+2)\lambda_j - (c+1)$; $j = 1, 2$ ซึ่งจะแสดงได้ดังนี้

จาก $$(a+2)x_n - (c+1)x_{n-1} = (a+2)\frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b - a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\right]$$
$$-(c+1)\frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^{n-2} - (b - a\lambda_1)\lambda_2^{n-2}\right]$$
$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(b - a\lambda_2)\left[(a+2)\lambda_1 - (c+1)\right]\lambda_1^{n-2}$$
$$- \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(b - a\lambda_1)\left[(a+2)\lambda_2 - (c+1)\right]\lambda_2^{n-2}$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^2\lambda_1^{n-2} - (b - a\lambda_1)\lambda_2^2\lambda_2^{n-2}\right]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^n - (b - a\lambda_1)\lambda_2^n\right]$$

$$= x_{n+1} \;\; ; \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนนี้ต้องการพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่าลำดับ x_n ที่ถูกกำหนดโดยสูตร (2.2) นั้นมีความสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (2.1) หรือไม่ ซึ่งจะแสดงให้เห็นคำตอบ โดยเริ่มจาก $n = 0,1,2$ ดังนี้

$$x_1 = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(b - a\lambda_2 - b + a\lambda_1\right)$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a\lambda_1 - a\lambda_2\right)$$

$$= ax_0$$

$$x_2 = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1 - (b - a\lambda_1)\lambda_2\right]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(b\lambda_1 - b\lambda_2)$$

$$= bx_0$$

$$= (a^2 + a + r)x_0$$

$$= a^2x_0 + (a + r)x_0$$

$$= ax_1 + (a + r)x_0$$

$$x_3 = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^2 - (b - a\lambda_1)\lambda_2^2\right]$$

$$= \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[b(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - a\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\right]$$

$$= x_0\left[b(\lambda_1 + \lambda_2) - a\lambda_1\lambda_2\right]$$

$$= x_0\left[b(a+2) - a(c+1)\right]$$

$$= x_0\left[ab + 2b - a(c+1)\right]$$

$$= abx_0 + x_0\left[2b - a(c+1)\right]$$
$$= abx_0 + x_0\left[2(a^2+a+r) - a(a-r+1)\right]$$
$$= ax_2 + x_0(a^2+ar+a+2r)$$
$$= ax_2 + (a^2+ar)x_0 + (a+2r)x_0$$
$$= ax_2 + (a+r)x_1 + (a+2r)x_0$$

สำหรับ $n \ge 2$ จึงอนุมานว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (2.1) เป็นจริง เมื่อ $k \le n$ นั่นคือ

$$x_{k+1} = \sum_{j=0}^{k}\big(a+(k-j)r\big)x_j \ ; \ k \le n \qquad ...(2.9)$$

ต่อไปจะอาศัยความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปร่วมกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (2.9) นำมาแสดงให้เห็นจริงถึงคำตอบของ x_{n+2} ว่าสามารถสอดคล้องเข้ากับความสัมพันธ์ (2.1) ได้หรือไม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= (a+2)x_{n+1} - (c+1)x_n \\
&= (a+2)\sum_{k=0}^{n}\big(a+(n-k)r\big)x_k - (c+1)\sum_{k=1}^{n}\big(a+(n-k)r\big)x_{k-1} \\
&= (a+2)\left[\big(a+nr\big)x_0 + \big(a+(n-1)r\big)x_1 + \sum_{k=2}^{n}\big(a+(n-k)r\big)x_k\right] \\
&\quad -(c+1)\left[\big(a+(n-1)r\big)x_0 + \sum_{k=2}^{n}\big(a+(n-k)r\big)x_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=2}^{n}\big(a+(n-k)r\big)\Big[\big(a+2\big)x_k - \big(c+1\big)x_{k-1}\Big] + (a+2)\big(a+(n-1)r\big)x_1 \\
&\quad +(a+2)(a+nr)x_0 - (c+1)\big(a+(n-1)r\big)x_0 \\
&= \sum_{k=2}^{n}\big(a+(n-k)r\big)x_{k+1} + (a+2)\big(a+(n-1)r\big)x_1 \\
&\quad +(a+2)(a+nr)x_0 + (r-a-1)\big(a+(n-1)r\big)x_0
\end{aligned}$$

$$x_{n+2} = \sum_{k=2}^{n} \left(a+(n-k)r\right) x_{k+1} + a\left(a+(n-1)r\right) x_1 + 2\left(a+(n-1)r\right) x_1$$
$$+a(a+nr)x_0 + 2(a+nr)x_0 + (r-a-1)\left(a+(n-1)r\right) x_0$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \left(a+(n-k)r\right) x_{k+1} + \left[\left(a+(n-1)r\right) ax_1 + \left(a+(n-1)r\right)(r-a-1)x_0\right]$$
$$+a(a+nr)x_0 + \left[2\left(a+(n-1)r\right) x_1 + 2(a+nr)x_0\right]$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \left(a+(n-k)r\right) x_{k+1} + \left[\left(a+(n-1)r\right)(a+r)x_0 + \left(a+(n-1)r\right) ax_1\right]$$
$$+(a+nr)ax_0 + \left[2\left(a+(n-1)r\right) ax_0 + 2(a+nr)x_0 + \left(a+(n-1)r\right)(-2a-1)x_0\right]$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \left(a+(n-k)r\right) x_{k+1} + \left(a+(n-1)r\right)\left[(a+r)x_0 + ax_1\right]$$
$$+(a+nr)x_1 + \left[2(a+nr) - \left(a+(n-1)r\right)\right] x_0$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \left(a+(n-k)r\right) x_{k+1} + \left(a+(n-1)r\right) x_2 + (a+nr)x_1 + \left(a+(n+1)r\right) x_0$$
$$x_{n+2} = ax_{n+1} + (a+r)x_n + \ldots + \left(a+(n-2)r\right) x_3 + \left(a+(n-1)r\right) x_2$$
$$+(a+nr)x_1 + \left(a+(n+1)r\right) x_0$$

$$x_{(n+1)+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(a+(n+1-k)r\right) x_k$$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต เป็นจริงสำหรับดัชนี $n+1$ ซึ่งเป็นไปตามสัจพจน์อุปนัย ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้จึงเป็นจริงได้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ข้อสังเกต

1) โดยปกติลำดับของจำนวนฟีโบนักชี ไม่สามารถหาคำตอบของสมการ (2.1) ได้ทั้งนี้ เมื่อกำหนดให้ $a+2=-c-1=r-a-1=1$ ดังนั้นสมการ (1.2) จึงเปลี่ยนเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีคือ $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x_1=ax_0=1$ และ $x_2=bx_0=(a^2+a+r)x_0=1$ แต่เงื่อนไขเหล่านี้เกิดการขัดแย้งกัน จึงนำไปสู่สมการที่เป็นเท็จ นั่นคือ $x_0=1=-1$

2) การก้าวหน้าเลขคณิต x_n รูปหนึ่ง อาจไม่สามารถหาคำตอบสมการ (2.1) ได้อย่างแท้จริง ถ้ากำหนดว่า $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$ นั่นคือ $a+2=2$ และ $-c-1=r-a-1=-1$ ซึ่งนำไปสู่ข้อเท็จจริงที่ชัดเจนว่า $a=r=x_n=0$ สำหรับ $n=1,2,\ldots$

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} + \ldots + nx_1 + (n+1)x_0$; $n=0,1,2,\ldots$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 1$ เราจะแสดงการหาคำตอบของ x_n ให้เห็นทั้ง 2 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 โดยอาศัยสูตรแบบเนท

จาก $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} + \ldots + nx_1 + (n+1)x_0$; $n=0,1,2,\ldots$ นำไปเทียบเคียงกับ (2.1) จึงได้ว่า

$a=1$ และ $a+r=2$ ดังนั้น $a=r=1$ แล้วจึงนำค่า a และ r แทนในสูตรแบบบิเนทข้างล่าง

$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b-a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b-a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\right] \quad ; \quad n=1,2,3,\ldots$$

เมื่อ $b = a^2 + a + r,\ \lambda_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{a^2+4r}}{2}$

จึงได้ $b=3$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

และ

$$x_n = \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}\left(\left[3-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left[3-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

ดังนั้น $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$; $n=1,2,3,\ldots$

ต่อไปจะยกตัวอย่างชุดคำตอบบางค่าให้เห็นเพื่อเป็นข้อสังเกตดังนี้

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 3$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = 8$$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right] = 21$$

วิธีที่ 2 โดยอาศัยความสัมพันธ์เวียนเกิดของฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป

จากสมการ $x_{n+1} = (a+2)x_n - (c+1)x_{n-1}$; $n = 2, 3, 4, \ldots$

ในที่นี้ $a = 1$, $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ และ $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

จึงได้ $a + 2 = 3$ และ $c + 1 = \lambda_1\lambda_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

ดังนั้น $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$; $n = 2, 3, 4, \ldots$

ต่อไปจะยกตัวอย่างชุดคำตอบบางค่าให้เห็นเพื่อเป็นข้อสังเกตดังนี้

$$x_3 = 3x_2 - x_1 = 3(3) - 1 = 8$$

$$x_4 = 3x_3 - x_2 = 3(8) - 3 = 21$$

ดังนั้นจึงสังเกตเห็นว่าการหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิตสามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป (เมื่อ n = 2, 3, 4,...) จะมีความสะดวก รวดเร็ว และแม่นยำกว่าสูตรแบบบิเนท แต่มีข้อจำกัดอยู่ว่าไม่สามารถหาค่าได้สำหรับ n = 1 และสำหรับสูตรแบบบิเนทสามารถหาคำตอบได้ทุกจำนวนธรรมชาติ n แต่ก็มีความยุ่งยากในการคำนวณอยู่มาก

สรุป

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต

$$x_{n+1} = ax_n + (a+r)x_{n-1} + \ldots + \big(a + (n-1)r\big)x_1 + (a+nr)x_0 \;\; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

โดยที่ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น เมื่อลดรูปสมการจึงได้เป็นความสัมพันธ์ฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$x_{n+1} = (a+2)x_n - (c+1)x_{n-1} \;;\; n = 2, 3, 4, \ldots \quad \text{เมื่อ } c = a - r$$

นอกจากนี้ยังใช้วิธีของสมการลักษณะเฉพาะและฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อหาคำตอบ x_n ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต ในสูตรแบบบิเนท ซึ่งกำหนดโดย

$$x_n = \frac{x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(b - a\lambda_2)\lambda_1^{n-1} - (b - a\lambda_1)\lambda_2^{n-1}\right] \;;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ $b = a^2 + a + r,\;\; \lambda_{1,2} = \dfrac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 + 4r}}{2}$

และใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป นำมาพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อให้เห็นความสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเลขคณิต

เอกสารอ้างอิง

Cîrnu, M.I. (2013). Linear recurrence relations with the coefficients in progression. **U.P.B. Scientific Bulletin**, 42, 119-127.

Horadam, A.F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. **American Mathematical Monthly**, 68(5), 455-459.

Horadam, A.F. (1965). Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, **Duke Math. J.**, 32, 437-446.