จำนวนแบบออยเลอร์และอนุกรมเลขคณิต - เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

กำจร มุณีแก้ว

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร
Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

ได้รับบทความ: 6 ธันวาคม 2561
ได้รับบทความแก้ไข: 27 สิงหาคม 2562
ยอมรับตีพิมพ์: 23 ตุลาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอถึงจำนวนแบบออยเลอร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไปคือ $\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \;, |z| < 1$ โดยมีจุดประสงค์เพื่อศึกษากระบวนการหานิพจน์ของจำนวนแบบออยเลอร์โดยละเอียดและวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของจำนวนแบบออยเลอร์อย่างเป็นระบบ ซึ่งได้ผลเป็นดังนี้

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $E(n,k)$ เป็นจำนวนแบบออยเลอร์ นิพจน์รูปแบบปิดสำหรับจำนวนแบบออยเลอร์ กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \quad ; \; k = 0,1,\dots,n-1$$

เมื่อ $E(n,0) = E(n,n-1) = 1$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \; ; \; k = 1,2,\dots,n-2$

คำสำคัญ: จำนวนแบบออยเลอร์ / อนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป

Eulerian Numbers and Generalized Arithmetic - Geometric Series

Kumjorn Muneekaew

Mathematics Program, Faculty of Science and Technology,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

Received: 6 December 2018
Revised: 27 August 2019
Accepted: 23 October 2019

Abstract

This article presents the Eulerian numbers that are related to the generalized arithmetic - geometric series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\, z^k \quad ,|z| < 1$$

The purpose is to study the process of finding expression for the Eulerian numbers in detail and analyze the relations of the Eulerian numbers systematically. The results are as follows:

Let $n \neq 0$ be a natural number and $E(n,k)$ are the Eulerian numbers. Closed form expression of the Eulerian numbers are given by the formula:

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \quad ; \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

when $E(n,0) = E(n,n-1) = 1$

and $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k)\ ;\ k = 1,2,\dots,n-2$

Keywords: Eulerian numbers / Generalized arithmetic-geometric series

บทนำ

กำหนดอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = z + z^2 + z^3 + \ldots$$

เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

นั่นคือ $$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z} \quad ; \quad |z| < 1$$

และอนุกรมอนันต์ที่เป็นอนุกรมเลขคณิต - เรขาคณิต ได้กำหนดไว้เป็นดังนี้

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = z + 2^n z^2 + 3^n z^3 + \ldots \qquad ; \quad n \in N$$

ฉะนั้นขั้นแรกจะอธิบายถึงกระบวนการหาคำตอบให้เป็นที่เข้าใจกันก่อนดังกรณีตัวอย่างต่อไปนี้

เมื่อ $n = 1$; $$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

จะได้ $$z\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k - z\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$$

$$(1-z)\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{1-z}$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

เมื่อ $n = 2$; $$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k = z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \ldots$$

พิจารณา $$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 z^k = 4z + 9z^2 + 16z^3 + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+2k+1)z^k = \frac{z(1+4z+9z^2+16z^3+\ \dots)-z}{z}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k+2\sum_{k=1}^{\infty}kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}z^k = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k-1$$

$$\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k-\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k = 2\sum_{k=1}^{\infty}kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}z^k+1$$

$$\frac{(1-z)}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k = \frac{2z}{(1-z)^2}+\frac{z}{1-z}+1$$

$$(1-z)\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k = \frac{z}{(1-z)^2}(1+z)$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k = \frac{z}{(1-z)^3}(1+z) \qquad \text{............. (2)}$$

เมื่อ $n=3$; $$\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k = z+8z^2+27z^3+64z^4+\ \dots$$

พิจารณา $$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^3z^k = 8z+27z^2+64z^3+\dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^3+3k^2+3k+1)z^k = \frac{z(1+8z+27z^2+64z^3+\ \dots)-z}{z}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k+3\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k+3\sum_{k=1}^{\infty}kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}z^k = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k-1$$

$$\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k-\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k = 3\sum_{k=1}^{\infty}k^2z^k+3\sum_{k=1}^{\infty}kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}z^k+1$$

$$\frac{(1-z)}{z}\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k = \frac{3z}{(1-z)^3}(1+z)+\frac{3z}{(1-z)^2}+\frac{z}{1-z}+1$$

$$(1-z)\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k = \frac{z}{(1-z)^3}(1+4z+z^2)$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{\infty}k^3z^k = \frac{z}{(1-z)^4}(1+4z+z^2) \qquad \text{............. (3)}$$

เมื่อ $n = 4$; $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = z + 16z^2 + 81z^3 + 256z^4 + \ldots$

พิจารณา $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^4 z^k = 16z + 81z^2 + 256z^3 + \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) z^k = \frac{z(1 + 16z + 81z^2 + 256z^3 + \ldots) - z}{z}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k + 6\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k - 1$$

$$\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k - \sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = 4\sum_{k=1}^{\infty} k^3 z^k + 6\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + 1$$

$$\frac{(1-z)}{z}\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = \frac{4z}{(1-z)^4}(1 + 4z + z^2) + \frac{6z}{(1-z)^3}(1+z) + \frac{4z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} + 1$$

$$(1-z)\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = \frac{z}{(1-z)^4}(1 + 11z + 11z^2 + z^3)$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 z^k = \frac{z}{(1-z)^5}(1 + 11z + 11z^2 + z^3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

จาก (1) – (4) จึงได้ว่า $$\sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k = \frac{z}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนธรรมชาติ และ c_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ z^k

จำนวนแบบออยเลอร์เป็นจำนวนหนึ่งที่มีความสำคัญต่ออนุกรมเลขคณิต - เรขาคณิต ซึ่งมีประเด็นที่น่าศึกษาดังนี้

1. นิพจน์รูปแบบปิดสำหรับจำนวนแบบออยเลอร์

ทฤษฎีบท ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติและจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n, k)$ กำหนดโดยสูตร

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k - j + 1)^n \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

สำหรับ $k = n$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j}(n-j+1)^n = 0$$

และ $k \geq n+1$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k-j+1)^n = 0$$

พิสูจน์ จากความสัมพันธ์ (5) จึงกำหนดได้ในรูปแบบใหม่ เป็นดังนี้

$$(1-z)^{n+1}\sum_{j=1}^{\infty} j^n z^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \quad ; \quad |z| < 1$$

$$(1-z)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n z^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \quad ; \quad j = k+1$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}z^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n z^k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \qquad \text{.............} (1.1)$$

กำหนด $$a_k = \begin{cases} (-1)^k\binom{n+1}{k} & , k = 0, 1, \dots, n+1 \\ 0 & , k > n+1 \end{cases}$$

และ $$b_k = (k+1)^n \qquad , k = 0, 1, \dots$$

จากข้อกำหนดข้างต้นจึงได้ความสัมพันธ์ (1.1) เป็นดังนี้

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \quad ; \quad k \leq n-1$$

$$(a_0z^0 + a_1z^1 + a_2z^2 + \dots)(b_0z^0 + b_1z^1 + b_2z^2 + \dots) = c_0z^0 + c_1z^1 + c_2z^2 + \dots$$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\ c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\ c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\ &\vdots \\ c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + a_3b_{k-3} + \dots + a_kb_0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นเราจึงกำหนด c_k ได้เป็นดังนี้

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j} = E(n\,,k) \quad ; \quad k \le n-1$$

โดยข้อกำหนด a_k และ b_k เราจึงได้สูตรจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n\,,k)$ เป็นดังนี้

$$E(n\,,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \quad ; \quad k = \ 0,1,\dots,n-1$$

สำหรับ $k = n$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j} (n-j+1)^n = 0$$

และ $k \ge n+1$ จะได้ $$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n = 0$$

จากการวิเคราะห์โดยใช้สูตรนิพจน์ $E(n\,,k)$ จึงได้ผลการคำนวณตรงตาม Cîrnu [1] ที่ได้นำเสนอจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n\,,k)$ ไว้เป็นตัวอย่าง ดังแสดงในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างจำนวนแบบออยเลอร์ $E(n\,,k)$

k n	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

จากตารางที่ 1 พบว่า $E(n\,,0) = 1$ และ $E(n\,,n-1) = 1$

ดังนั้น $E(n\,,0) = \ E(n\,,n-1) \quad ; \quad n = 1,2,\dots$

2. ความสัมพันธ์ของจำนวนแบบออยเลอร์

จาก $E(n\,,k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k-j+1)^n \quad ; \quad k=\ 0,1,\dots,n-1$

เมื่อแทน n ด้วย n + 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&E(n+1\,,k)\\
&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+2}{j}(k-j+1)^{n+1}\\
&=\binom{n+2}{0}(k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{n+2}{j}(k-j+1)^{n+1}\\
&=(1)(k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{n+2}{j}(k-j+1)^{n+1}\\
&=\binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[\binom{n+1}{j}+\binom{n+1}{j-1}\right](k-j+1)^{n+1}\\
&=\binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1}-\left[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}\right]k^{n+1}+\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{1}\right](k-1)^{n+1}\\
&\quad-\left[\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\right](k-2)^{n+1}+\ \dots+(-1)^k\left[\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k-1}\right]\\
&=\binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1}+\left[-k\binom{n+1}{1}k^n-k\binom{n+1}{0}k^n\right]\\
&\quad+\left[(k-1)\binom{n+1}{2}(k-1)^n+(k-1)\binom{n+1}{1}(k-1)^n\right]\\
&\quad+\left[-(k-2)\binom{n+1}{3}(k-2)^n-(k-2)\binom{n+1}{2}(k-2)^n\right]\\
&\quad+\ \dots+(-1)^k\left[\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1} + \left[-(k+1)\binom{n+1}{1}k^n + \binom{n+1}{1}k^n - k\binom{n+1}{0}k^n\right]$$

$$+ \left[(k+1)\binom{n+1}{2}(k-1)^n - 2\binom{n+1}{2}(k-1)^n + (k-1)\binom{n+1}{1}(k-1)^n\right]$$

$$+ \left[-(k+1)\binom{n+1}{3}(k-2)^n + 3\binom{n+1}{3}(k-2)^n - (k-2)\binom{n+1}{2}(k-2)^n\right]$$

$$+ \ \dots + (-1)^k\left[(k+1)\binom{n+1}{k} - k\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}\right]$$

$$= \binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1} + \left[-(k+1)\binom{n+1}{1}k^n + (n+1)\binom{n+1}{0}k^n - k\binom{n+1}{0}k^n\right]$$

$$+ \left[(k+1)\binom{n+1}{2}(k-1)^n - n\binom{n+1}{1}(k-1)^n + (k-1)\binom{n+1}{1}(k-1)^n\right]$$

$$+ \left[-(k+1)\binom{n+1}{3}(k-2)^n + (n-1)\binom{n+1}{2}(k-2)^n - (k-2)\binom{n+1}{2}(k-2)^n\right]$$

$$+ \ \dots + (-1)^k\left[(k+1)\binom{n+1}{k} - (n-k+2)\binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k-1}\right]$$

$$= \binom{n+1}{0}(k+1)^{n+1} + \left[-(k+1)\binom{n+1}{1}k^n + (n-k+1)\binom{n+1}{0}k^n\right]$$

$$+ \left[(k+1)\binom{n+1}{2}(k-1)^n - (n-k+1)\binom{n+1}{1}(k-1)^n\right]$$

$$+ \left[-(k+1)\binom{n+1}{3}(k-2)^n + (n-k+1)\binom{n+1}{2}(k-2)^n\right]$$

$$+ \ \dots + (-1)^k\left[(k+1)\binom{n+1}{k} - (n-k+1)\binom{n+1}{k-1}\right]$$

$$= (k+1)\binom{n+1}{0}(k+1)^n - (k+1)\binom{n+1}{1}k^n + (k+1)\binom{n+1}{2}(k-1)^n$$

$$- (k+1)\binom{n+1}{3}(k-2)^n + \ \dots + (-1)^k(k+1)\binom{n+1}{k}$$

$$+ (n-k+1)\binom{n+1}{0}k^n - (n-k+1)\binom{n+1}{1}(k-1)^n$$

$$+ (n-k+1)\binom{n+1}{2}(k-2)^n + \ \dots + (-1)^{k-1}(n-k+1)\binom{n+1}{k-1}$$

$$= (k+1)\left[\binom{n+1}{0}(k+1)^n - \binom{n+1}{1}k^n + \binom{n+1}{2}(k-1)^n - \binom{n+1}{3}(k-2)^n + \ldots + (-1)^k\binom{n+1}{k}\right]$$

$$+ (n-k+1)\left[\binom{n+1}{0}k^n - \binom{n+1}{1}(k-1)^n + \binom{n+1}{2}(k-2)^n + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{n+1}{k-1}\right]$$

$$= (k+1)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k-j+1)^n + (n-k+1)\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k-j)^n$$

$$= (k+1)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k-j+1)^n + (n-k+1)\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n+1}{j}[(k-1)-j+1]^n$$

$$= (k+1)E(n,k) + (n-k+1)E(n,k-1)$$

นั่นคือ $E(n+1,k) = (k+1)E(n,k) + (n-k+1)E(n,k-1)$; $k = 1,2,\ldots,n-1$

เมื่อแทน n ด้วย n – 1 ในความสัมพันธ์ข้างต้นจึงได้ว่า

$$E(n,k) = (k+1)E(n-1,k) + (n-k)E(n-1,k-1)$$

ดังนั้น $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k)$; $k = 1,2,\ldots,n-2$

ตัวอย่าง

$$E(3,1) = 2E(2,0) + 2E(2,1) = 2(1) + 2(1) = 4$$

$$E(4,1) = 3E(3,0) + 2E(3,1) = 3(1) + 2(4) = 11$$

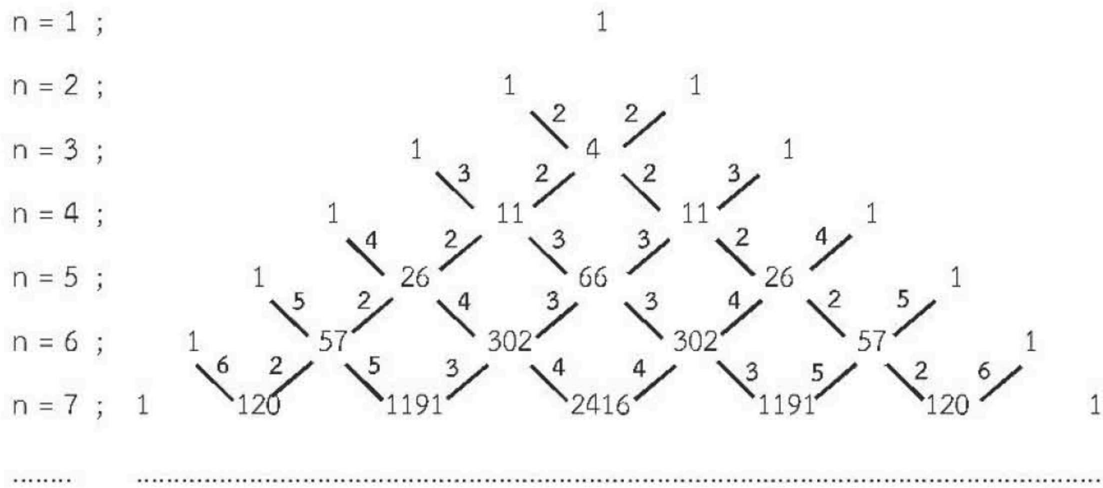
$$E(4,2) = 2E(3,1) + 3E(3,2) = 2(4) + 3(1) = 11$$

$$E(5,1) = 4E(4,0) + 2E(4,1) = 4(1) + 2(11) = 26$$

$$E(5,2) = 3E(4,1) + 3E(4,2) = 3(11) + 3(11) = 66$$

$$E(5,3) = 2E(4,2) + 4E(4,3) = 2(11) + 4(1) = 26$$

ต่อไปจะนำความสัมพันธ์ของจำนวนแบบออยเลอร์มาสร้างแผนผังให้เห็นเป็นตัวอย่างดังนี้



สรุป

ให้ $n \neq 0$ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $E(n,k)$ เป็นจำนวนแบบออยเลอร์ นิพจน์รูปแบบปิดสำหรับจำนวนแบบออยเลอร์ กำหนดโดยสูตรดังนี้

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n \ ; \ k = 0,1,\ldots,n-1$$

เมื่อ $E(n,0) = E(n,n-1) = 1$

และ $E(n,k) = (n-k)E(n-1,k-1) + (k+1)E(n-1,k) \ ; \ k = 1,2,\ldots,n-2$

เอกสารอ้างอิง

1. Cîrnu MI. Eulerian numbers and generalized arithmetic-geometric series. UPB Sci Bull, Series A 2009;71:25-30.