ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต

กำจร มุณีแก้ว*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร

*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

ได้รับบทความ: 14 กรกฎาคม 2563
ได้รับบทความแก้ไข: 31 สิงหาคม 2563
ยอมรับตีพิมพ์: 2 มิถุนายน 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอกระบวนการหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต $x_{n+1} = ax_n + aqx_{n-1} + ... + aq^{n-1}x_1 + aq^n x_0$; $n = 0,1,2,...$ เมื่อ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น ซึ่งต้องอาศัยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันก่อกำเนิดและการทำส่วนกลับ เพื่ออธิบายให้เห็นทุกขั้นตอนโดยละเอียด โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อหาจำนวน x_n ที่เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อจำนวน x_n เหล่านั้นอยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิตซึ่งได้ถูกกำหนดโดยสูตร $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,...$ และจำนวน x_n เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β นั่นคือ $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = a + 2q$ และ $\beta = -q(a+q)$

คำสำคัญ: ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น / การก้าวหน้าเรขาคณิต / จำนวนฟีโบนักชี

Linear Recurrence Relations with Coefficients in Geometic Progression

Kumjorn Muneekaew*

Mathematics Program, Faculty of Science and Technology,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University, Bangkok
*Corresponding author email: munee.j@hotmail.com

Received: 14 July 2020
Revised: 31 August 2020
Accepted: 2 June 2021

Abstract

This article presents the process of finding the solution of linear recurrence relations with coefficients in geometric progression, $x_{n+1} = ax_n + aqx_{n-1} + ... + aq^{n-1}x_1 + aq^n x_0$; $n = 0,1,2,...$ when x_0 is an initial data which relied on the method of mathematical induction, of generating function, and reciprocal, described all the steps in detail. The purpose is to find the numbers x_n, where x_n are solution of the linear recurrence relations with coefficients in geometric progression if and only if those numbers x_n are in the form of the geometric progression given by the formula, $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,...$ and the numbers x_n are generalized Fibonacci numbers of orders numbers α and β, $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$ if and only if, $\alpha = a + 2q$ and $\beta = -q(a+q)$.

Keywords: Linear recurrence relations / Geometric progression / Fibonacci numbers

บทนำ

ในหัวข้อนี้ Cîrnu [1] ได้ศึกษาวิธีแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิตด้วยการพิสูจน์โดยอาศัยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันก่อกำเนิด และวิธีการทำส่วนกลับ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันระหว่างความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นนั้นกับจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปที่เป็นแบบเชิงซ้อนหรือเรียกว่าจำนวน Horadam [2] ของอันดับ α และ β ในรูปแบบความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ ซึ่งประกอบด้วยค่าเริ่มต้นที่ไม่เจาะจง x_0 และ x_1 เมื่อถ้า $\alpha = \beta = 1$ โดยแทนที่ในความสัมพันธ์เวียนเกิดฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปจึงได้เป็น $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ โดยเรียกจำนวนเหล่านี้ว่าจำนวนฟีโบนักชีแบบปกติที่เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x_0 = 0$ และ $x_1 = 1$ และเมื่อความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิตแล้วคำตอบเหล่านั้น จะอยู่ในรูปการก้าวหน้าเช่นกัน ในท้ายที่สุดทั้งค่าสัมประสิทธิ์และคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นนั้นจึงเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไป

1. ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1 จำนวน x_n เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต

$$x_{n+1} = ax_n + aqx_{n-1} + ... + aq^{n-1}x_1 + aq^n x_0 \;\; ; n = 0, 1, 2, ... \qquad ...(1.1)$$

โดยที่ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น ก็ต่อเมื่อคำตอบเหล่านั้นอยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิตซึ่งกำหนดโดยสูตร

$$x_n = ax_0(a+q)^{n-1} \;\; ; \;\; n = 1, 2, 3, ... \qquad ...(1.2)$$

พิสูจน์ แสดงการพิสูจน์ออกเป็น 3 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 โดยอุปนัยเชิงคณิคศาสตร์

จาก (1.2) จึงได้ว่า $x_1 = ax_0$ เป็นคำตอบของสมการ (1.1)

และเมื่อลองหาบางคำตอบจากสมการ (1.1) ต่อไปอีก จึงได้คำตอบเป็นดังนี้คือ

$$x_2 = ax_1 + aqx_0 = a^2x_0 + aqx_0 = ax_0(a+q)$$

$$x_3 = ax_2 + aqx_1 + aq^2x_0 = a^2x_0(a+q) + a^2qx_0 + aq^2x_0$$

$$= a^2x_0(a+q) + aqx_0(a+q) = \left(a^2x_0 + aqx_0\right)(a+q)$$

$$= ax_0(a+q)^2$$

เราจึงสมมติว่าสูตร (1.2) เป็นจริง สำหรับทุก $k = 1, 2, 3, \ldots$
ดังนั้น $x_k = ax_0(a+q)^{k-1}$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots$

พิจารณาความสัมพันธ์เวียนเกิด (1.1) ดังนี้

จาก $x_{k+1} = ax_k + aqx_{k-1} + \ldots + aq^{k-1}x_1 + aq^k x_0$

$$= a\left[ax_0(a+q)^{k-1}\right] + aq\left[ax_0(a+q)^{k-2}\right] + \ldots + aq^{k-2}\left[ax_0(a+q)\right] + aq^{k-1}(ax_0) + aq^k x_0$$

$$= a^2x_0(a+q)^{k-1} + a^2qx_0(a+q)^{k-2} + \ldots + a^2q^{k-2}x_0(a+q) + a^2q^{k-1}x_0 + aq^k x_0$$

$$= a^2x_0(a+q)\left[(a+q)^{k-2} + q(a+q)^{k-3} + \ldots + q^{k-3}(a+q) + q^{k-2}\right] + aq^{k-1}x_0(a+q)$$

$$= a^2x_0(a+q)\left[(a+q)^{k-2}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{a+q}\right)^{k-1}}{1-\frac{q}{a+q}}\right)\right] + aq^{k-1}x_0(a+q)$$

$$= a^2x_0(a+q)\left[(a+q)^{k-2}\left(\frac{(a+q)^{k-1} - q^{k-1}}{(a+q)^{k-1}}\right)\left(\frac{a+q}{a}\right)\right] + aq^{k-1}x_0(a+q)$$

$$= a^2x_0(a+q)\left[\frac{(a+q)^{k-1} - q^{k-1}}{a}\right] + aq^{k-1}x_0(a+q)$$

$$= ax_0(a+q)^k - aq^{k-1}x_0(a+q) + aq^{k-1}x_0(a+q)$$

$$= ax_0(a+q)^k$$

$$x_{k+1} = ax_0(a+q)^{(k+1)-1}$$

ดังนั้น (1.2) เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ซึ่งเป็นไปตามหลักอุปนัย นั่นคือ สูตร (1.2) จึงเป็นจริง สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

วิธีที่ 2 โดยวิธีฟังก์ชันก่อกำเนิด

ต่อไปกล่าวถึงฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ x_n โดยนิยามเป็นดังนี้

กำหนดให้ $X(t)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \quad ; \quad |t|<1 \qquad ...(1)$

$$= x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots$$

$$= x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} t^{n+1}$$

$$= x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a q^k x_{n-k} t^{n+1}$$

$$= x_0 + at\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k x_{n-k} t^n \qquad ...(2)$$

พิจารณา (2) ดังนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k x_{n-k} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + q x_{n-1} + q^2 x_{n-2} + \ldots + q^n x_0) t^n$$

$$= (x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots) + (q x_0 t + q x_1 t^2 + q x_2 t^3 + \ldots) + (q^2 x_0 t^2 + q^2 x_1 t^3 + q^2 x_2 t^4 + \ldots) + \ldots$$

$$= (1 + qt + q^2 t^2 + \ldots) x_0 + (1 + qt + q^2 t^2 + \ldots) x_1 t + (1 + qt + q^2 t^2 + \ldots) x_2 t^2 + \ldots$$

$$= (1 + qt + q^2 t^2 + \ldots)(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n\right) \qquad ...(3)$$

จาก (2) และ (3) จึงได้ว่า

$$X(t) = x_0 + at\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n\right)$$

$$X(t) = x_0 + \left(\frac{at}{1-qt}\right) X(t)$$

$$\left[\frac{(1-qt)-at}{1-qt}\right] X(t) = x_0$$

$$X(t) = x_0\left[\frac{qt-1}{(a+q)t-1}\right]$$

$$= x_0\left[\frac{q}{a+q} + \left(-1+\frac{q}{a+q}\right)\left(\frac{1}{(a+q)t-1}\right)\right]$$

$$= x_0\left[\frac{q}{a+q} + \frac{a}{(a+q)(1-(a+q)t)}\right]$$

$$= \frac{qx_0}{a+q} + \left(\frac{ax_0}{a+q}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(a+q)^n t^n$$

$$= \frac{qx_0}{a+q} + ax_0\sum_{n=0}^{\infty}(a+q)^{n-1} t^n$$

$$= \frac{qx_0}{a+q} + ax_0(a+q)^{-1} + ax_0\sum_{n=1}^{\infty}(a+q)^{n-1} t^n$$

$$= x_0\left(\frac{q}{a+q} + \frac{a}{a+q}\right) + ax_0\sum_{n=1}^{\infty}(a+q)^{n-1} t^n$$

$$X(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ax_0(a+q)^{n-1} t^n$$

และจาก (1) ; $X(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$

นั่นคือ $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

วิธีที่ 3 โดยทำส่วนกลับ

$$a\sum_{k=0}^{n} q^{n-k}x_k = a(q^n x_0 + q^{n-1}x_1 + q^{n-2}x_2 + \ldots + x_n)$$

$$= aq^n x_0 + a\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}x_k$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}ax_0(a+q)^{k-1} + aq^n x_0$$

$$= a^2x_0\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}(a+q)^{k-1} + aq^n x_0$$

$$= a^2q^{n-1}x_0\sum_{k=1}^{n} q^{1-k}(a+q)^{k-1} + aq^n x_0$$

$$= a^2q^{n-1}x_0\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+q}{q}\right)^{k-1} + aq^n x_0$$

$$= a^2 q^{n-1} x_0 \left[\frac{\left(\frac{a+q}{q}\right)^n - 1}{\frac{a+q}{q} - 1} \right] + a q^n x_0$$

$$= a^2 q^{n-1} x_0 \left[\frac{(a+q)^n - q^n}{q^n} \right] \frac{q}{a} + a q^n x_0$$

$$= a x_0 \left[(a+q)^n - q^n \right] + a q^n x_0$$

$$a \sum_{k=0}^{n} q^{n-k} x_k = a x_0 (a+q)^n = x_{n+1} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้นลำดับ x_n จึงสอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (1.1)

2. ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปซึ่งอยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต

บทตั้ง พจน์ $a_n = aq^n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ ของการก้าวหน้าเรขาคณิตเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β ก็ต่อเมื่อ อัตราส่วนการก้าวหน้าได้ถูก กำหนดโดยสูตร

$$q = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

พิสูจน์ ถ้าพจน์ a_n ของการก้าวหน้าเรขาคณิตเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β แล้วความสัมพันธ์ $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$ จึงเปลี่ยนมาเป็น

$$aq^{n+1} = \alpha a q^n + \beta a q^{n-1}$$

$$q^2 = \alpha q + \beta$$

$$q^2 - \alpha q - \beta = 0$$

$$\therefore \quad q = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

ดังนั้น $a_n = aq^n$ เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\alpha = 2i$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ และ $\beta = 1$

จาก $q = \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$

จึงได้ $q = \dfrac{2i \pm \sqrt{4i^2 + 4(1)}}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$

จาก $a_n = aq^n$ โดยให้ $q = i$

จึงได้ $a_n = ai^n$ เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ $2i$ และ 1

ต่อไปเราจะแสดงการหาผลบวกของ $\alpha a_n + \beta a_{n-1}$ เมื่อให้ $\alpha = 2i$ และ $\beta = 1$ จึงได้

$$2ia_n + a_{n-1} = 2ai^{n+1} + ai^{n-1} = ai^{n-1}(2i^2 + 1) = ai^{n-1}(-1)$$

$$= ai^{n-1} \cdot i^2 = ai^{n+1} = a_{n+1}$$

ทฤษฎีบท 2 สัมประสิทธิ์ $a_n = aq^n$; $n = 0,1,2,\ldots$ และคำตอบ $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,\ldots$ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (1.1) ซึ่งทั้งสองก็เป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β ก็ต่อเมื่อ $\alpha = a + 2q$, $\beta = -q(a+q)$

พิสูจน์ จากบทตั้ง พจน์ $a_n = aq^n$; $n = 0,1,2,\ldots$ ซึ่งเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β จึงเขียนได้ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเป็นดังนี้

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$$

$$aq^{n+1} = \alpha aq^n + \beta aq^{n-1}$$

นั่นคือ $q^2 - \alpha q - \beta = 0$

และคำตอบ $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,\ldots$ ซึ่งเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β

เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$

$$ax_0(a+q)^n = \alpha ax_0(a+q)^{n-1} + \beta ax_0(a+q)^{n-2}$$

$$(a+q)^2 - \alpha(a+q) - \beta = 0$$

$$a^2 + 2aq + q^2 - \alpha a - \alpha q - \beta = 0$$

$$a^2 + 2aq - \alpha a = 0 \quad \left(\because q^2 - \alpha q - \beta = 0\right)$$

$$\alpha = a + 2q \qquad \ldots(1)$$

จาก $q^2 - \alpha q - \beta = 0$ หรือ $\beta = q^2 - \alpha q$

จาก (1) นำค่า α แทนในสมการ $\beta = q^2 - \alpha q$ จึงได้

$$\begin{aligned}\beta &= q^2 - (a+2q)q \\ &= q^2 - aq - 2q^2 \\ &= -q^2 - aq \\ \beta &= -q(a+q) \qquad ...(2)\end{aligned}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ (1) และ (2) จึงเป็นอันดับ α และ β ตามลำดับ

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ $a_n = aq^n$ และคำตอบ x_n ใน (1.1) จึงเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ $\alpha = a + 2q$ และ $\beta = -q(a+q)$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $a = q = i$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$

จาก $a_n = aq^n$; $n = 0,1,2,\ldots$ จึงได้ $a_n = i^{n+1}$

และจาก $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}x_n &= ix_0(2i)^{n-1} \\ &= \frac{ix_0(2i)^n}{2i}\end{aligned}$$

จึงได้ $x_n = \dfrac{x_0}{2}(2i)^n$

ผลลัพธ์ทั้ง a_n และ x_n จึงเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ

$\alpha = a + 2q = 3i$ และ $\beta = -q(a+q) = -i(2i) = 2$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}3ia_n + 2a_{n-1} &= 3i \cdot i^{n+1} + 2i^n = 3i^{n+2} + 2i^n \\ &= i^n(3 \cdot i^2 + 2) = i^n(-1) \\ &= i^{n+2} = a_{n+1}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}3ix_n + 2x_{n-1} &= 3i\left(\frac{x_0}{2}(2i)^n\right) + 2\left(\frac{x_0}{2}(2i)^{n-1}\right) \\ &= \frac{x_0}{2}\left(3i(2i)^n + 2(2i)^{n-1}\right) \\ &= \frac{x_0}{2}(2i)^{n-1}\left(3i(2i) + 2\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{x_0}{2}(2i)^{n-1}\left(-4\right)$$

$$= \frac{x_0}{2}(2i)^{n-1}\left(2i\right)^2$$

$$= \frac{x_0}{2}(2i)^{n+1}$$

$$= x_{n+1}$$

ตัวอย่างที่ 3 สัมประสิทธิ์ a_n และคำตอบ x_n ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (1.1) เป็นจำนวนฟีโบนักชีทั้งคู่ ก็ต่อเมื่อ $a = \mp\sqrt{5}$, $q = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

จาก $q^2 - \alpha q - \beta = 0$

สำหรับ $\alpha = \beta = 1$ จะได้ $q^2 - q - 1 = 0$

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

จาก $\alpha = a + 2q$ ดังนั้น $a + 2q = 1$

เมื่อ $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $a + 2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ จึงได้ $a = -\sqrt{5}$

เมื่อ $q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $a + 2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ จึงได้ $a = \sqrt{5}$

จาก $\beta = -q(a+q)$

เมื่อ $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $a = -\sqrt{5}$

ดังนั้น $\beta = -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\sqrt{5} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{5}+1\right)}{4} = 1$

และเมื่อ $q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $a = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\beta = -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{5} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = 1$

สรุป

จำนวน x_n เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต $x_{n+1} = ax_n + aqx_{n-1} + ... + aq^{n-1}x_1 + aq^n x_0 \; ; n = 0,1,2,...$ โดยที่ x_0 เป็นข้อมูลเริ่มต้น ก็ต่อเมื่อคำตอบเหล่านั้นอยู่ในรูปการก้าวหน้าเรขาคณิต ซึ่งกำหนดโดยสูตร $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,...$ สำหรับสัมประสิทธิ์ $a_n = aq^n$; $n = 0,1,2,...$ และคำตอบ $x_n = ax_0(a+q)^{n-1}$; $n = 1,2,3,...$ ซึ่งทั้งสองต่างเป็นจำนวนฟีโบนักชีที่วางนัยทั่วไปของอันดับ α และ β ก็ต่อเมื่อ $q = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$ และ $\alpha = a + 2q$, $\beta = -q(a+q)$

เอกสารอ้างอิง

1. Cîrnu MI. Linear recurrence relations with the coefficients in progression. Ann Math et Inform 2013;42:119-27.
2. Horadam AF. A generalized Fibonacci sequence. Am Math Mon 1961;68:455-9.